b) réciproquement :
g est solution de (E') $\Rightarrow$ g'(t) = g(t) + 1
$\Rightarrow \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x g(t)dt + \int_0^x dt$

$\Rightarrow [g(t)]_0^x = \int_0^x g(t)dt + x$

$\Rightarrow g(x) - g(0) = \int_0^x g(t)dt + x$

g est solution de(E) lorsque $\boxed{g(0) = 0}$

3) les solutions de (E) sont celles de (E') vérifiant f(0) = 0
d'où : $f(x) = e^x - 1$
est la seule solution de (E)

EXERCICE 23 :

Q'(t) = - α Q(t)

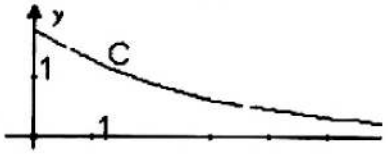
1) – a) Q est solution de l'équation différentielle : y' = - αy et Q(0) = 1,8
D'où :
$Q(t) = 1,8\, e^{-\alpha t}$

b) $Q(1) = 1,8 - \frac{30}{100}(1,8)$
Q(1) = 1,26
$\Rightarrow 1,8\, e^{-\alpha t} = 1,26$
$\Rightarrow \boxed{e^{-\alpha t} = 0,7}$

c) $f(x) = e^{-x}$; $f'(x) = -e^{-x} < 0$
f est continue et strictement décroissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur IR
Comme (0,7) ∈ IR alors il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0,7 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 0,7$

* $g(x) = e^{-x} - 0,7$
$g(0) \times g(1) < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$
calculatrice $\Rightarrow 0,3566 < \alpha < 0,3567$

2) α ≈ 0,35665
$Q(t) = 1,8\, e^{-0,35665t}$
$Q'(t) = -0,35665 \times 1,8 e^{-0,35665t} < 0 \Rightarrow$ Q est décroissante et $\lim_{t \to +\infty} Q(t) = 0$



3) – a) $R_1 = 1,8 + Q(1)$
$= 1,8 + (1,8).e^{-\alpha} = 3,06$

$R_1 = 1,8 + (1,8) \times (0,7)$

b) $R_2 = 1,8 + R_1.e^{-\alpha}$
$R_2 = (1,8) + (0,7)\, R_1 = 3,942$

c) $R_{n+1} = 1,8 + (0,7)\, R_n$

d) Démonstration par récurrence :
* pour n = 0
$R_0 = (1,8) = 6 \times (0,3) = 6[1 - (0,7)^1]$

(Vrai)
* supposons que : $R_n = 6[1 - (0,7)^{n+1}]$

Montrons que : $R_{n+1} = 6[1 - (0,7)^{n+2}]$

$R_{n+1} = 1,8 + (0,7)\, R_n$
$R_{n+1} = 1,8 + 6.(0,7)\,[1 - (0,7)^{n+1}]$
$= 1,8 + 6[(0,7) - (0,7)^{n+2}]$
$= 6[0,3 + (0,7) - (0,7)^{n+2}]$
$= 6[1 - (0,7)^{n+2}]$
* conclusion
$R_n = 6[1 - (0,7)^{n+1}] \quad \forall n \in IN$

e) $\lim_{x \to +\infty} (0,7)^{n+1} = 0$
d'où :
$\lim_{x \to +\infty} Rn = 6$

EXERCICE 24 :

(I) : y' = 2y
(II) : y' = y
1) * les solutions de l'équation (I) sont les fonctions définies sur IR par :
$g(x) = k.e^{2x}$; ∀ k ∈ IR

* les solutions de l'équation (II) sont les fonctions définies sur IR par :
$h(x) = k'.e^x$; ∀ k' ∈ IR
2) $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$
a) f(0) = 1 car A(0,1) ∈ (C_f)

f'(0) = 3 (coefficient directeur de T)

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn